

Rezultatele mai multor investigații geotehnice realizate pentru caracterizarea unei entități litologice au fost colectate în vederea realizării unei baze de date privind greutatea volumică a pământului în stare naturală (γ). S-au obținut, în urma determinărilor, un număr de 171 valori ale greutății volumice (x_j).

Se cere analizarea statistică a acestor valori.

Pasul 1. Gruparea pe 14 intervale de mărimea $\Delta = 0,2 \text{ kN/m}^3$ (Tabelul 1.1 - coloana 1) și calculul frecvențelor absolute (n_i - numărul de valori dintr-un anumit interval) pentru fiecare interval.

Pasul 2. Calculul frecvențelor relative (f_i) și relative cumulate (F_i) ale datelor pentru fiecare interval (coloanele 3, 4 și 5 din Tabelul 1).

$$f_i = n_i/n$$

$$F_i = F_{i-1} + f_i$$

Pasul 3. Reprezentarea grafică a histogramelor frecvențelor absolute (Fig. 1.1), relative (Fig. 1.2) și a poligonului de frecvență (Fig. 1.3)

Tabelul 1.1

Tabel centralizator

i	Intervalul de grupare $\Delta=0,2 \text{ kN/m}^3$	Valoarea centrală a intervalului (kN/cm^3)	Frecvențe absolute	Frecvențe relative (probabilitatea)	Frecvențe relative cumulate
	Δ	x_i	n_i	f_i	F_i
0	1	2	3	4	5
1	16,0 – 16,2	16,1	3	0,018	0,018
2	16,2 – 16,4	16,3	4	0,023	0,041
3	16,4 – 16,6	16,5	7	0,041	0,082
4	16,6 – 16,8	16,7	13	0,076	0,158
5	16,8 – 17,0	16,9	22	0,129	0,287
6	17,0 – 17,2	17,1	28	0,164	0,450
7	17,2 – 17,4	17,3	26	0,152	0,602
8	17,4 – 17,6	17,5	25	0,146	0,749
9	17,6 – 17,8	17,7	19	0,111	0,860
10	17,8 – 18,0	17,9	15	0,088	0,947
11	18,0 – 18,2	18,1	5	0,029	0,977
12	18,2 – 18,4	18,3	2	0,012	0,988
13	18,4 – 18,6	18,5	1	0,006	0,994
14	18,6 – 18,8	18,7	1	0,006	1,000

Fig. 1.1

Histograma frecvențelor absolute n_i

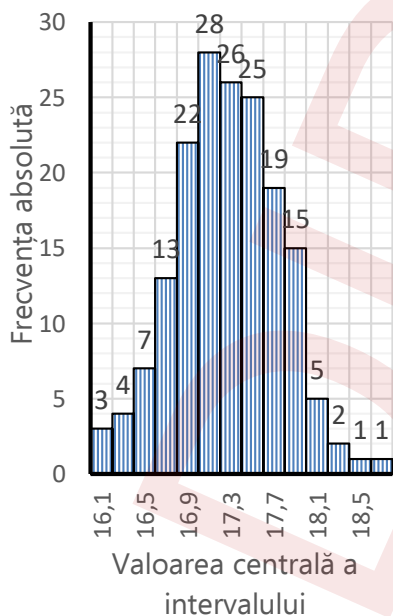


Fig. 1.2

Histograma frecvențelor relative f_i

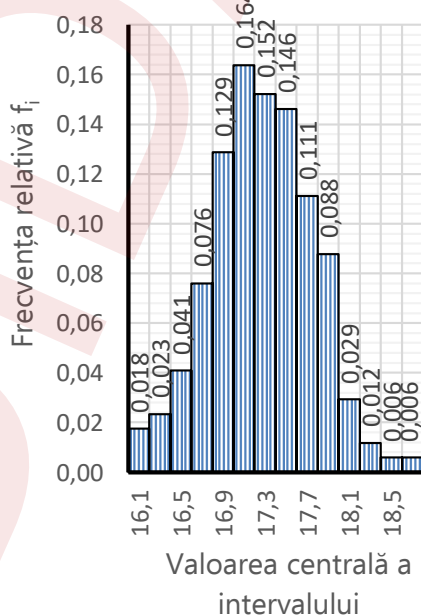
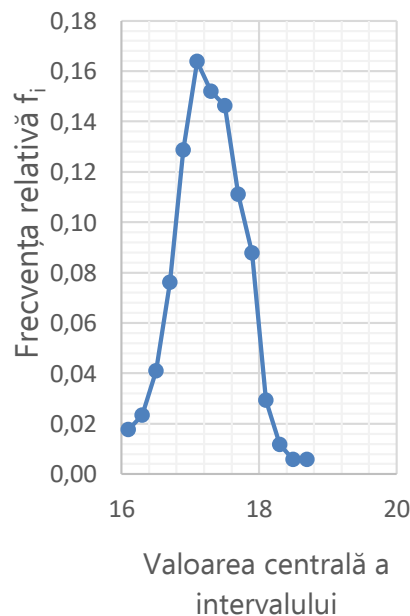


Fig. 1.3

Poligonul de frecvență



Pasul 4. Reprezentarea grafică a histogramei (Fig. 1.4) și poligonului (Fig. 1.5) frecvențelor relative cumulate.

Fig. 1.4

Histograma

frecvențelor relative cumulate F_i

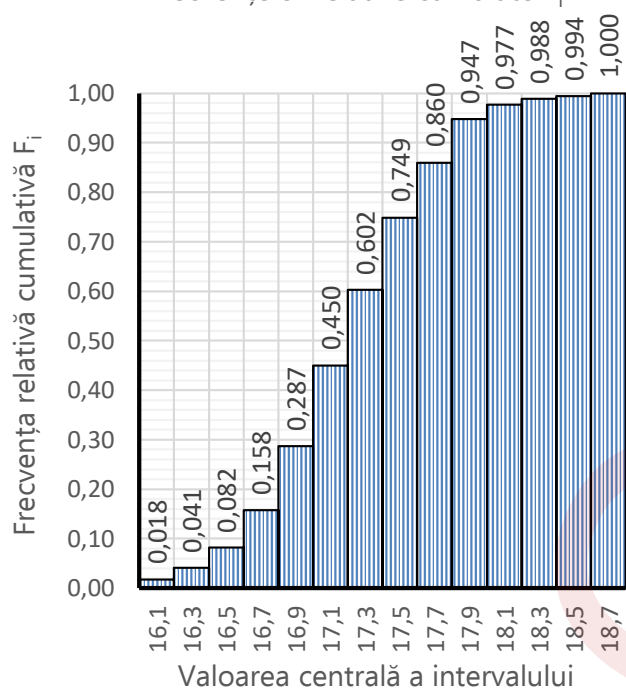
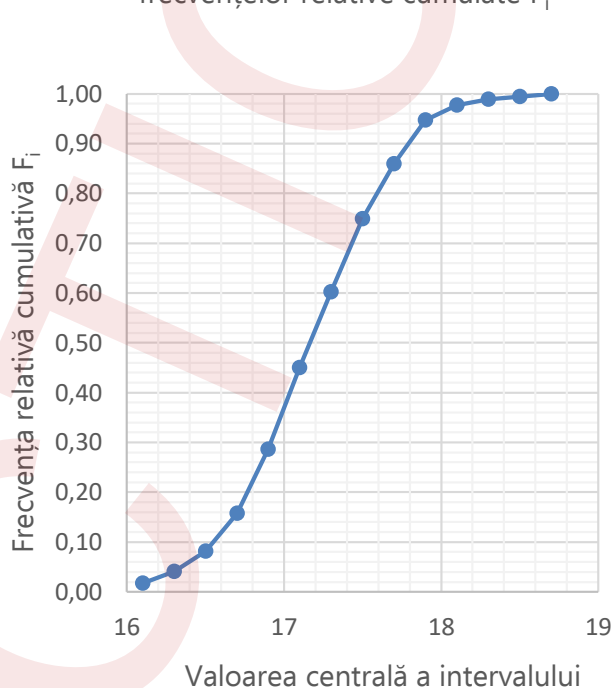


Fig. 1.5

Poligonul

frecvențelor relative cumulate F_i



Pasul 5. Calculul indicilor de localizare a repartiției normale:

- media

$$X_m = \sum_{i=1}^{14} x_i \cdot f_i = \frac{\sum_{i=1}^{14} x_i \cdot n_i}{n} = 17,27$$

- abaterea standard

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{14} f_i \cdot (x_i - X_m)^2} = 0,48$$

- coeficientul de variație

$$V_x = \frac{\sigma_x}{X_m} = 0,028$$

Pasul 6. Calculul variabilei reduse (coloana 6):

$$z_i = \frac{x_i - X_m}{\sigma_x}$$

Pasul 7. Calculul ordonatei densității de repartiție a variabilei reduse (coloana 7):

$$f_z(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z_i^2}$$

$$= 1/\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \text{EXP}(-1/2 \cdot z_i^2)$$

Pasul 8. Calculul ordonatei funcției de repartiție a variabilei reduse (coloana 8):

$$F_z(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^y e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Valorile sunt selectate din tabele în funcție de valoarea lui z_i .

De asemenea, se poate folosi funcția ERF.PRECISE din Microsoft Excel:

$$F_z(z_i) = \frac{1}{2} \cdot \left[\text{erf} \left(\frac{z_i}{\sqrt{2}} \right) + 1 \right]$$

$$= 1/2 * (\text{ERF.PRECISE}(z_i/\text{sqrt}(2)) + 1)$$

Pasul 9. Calculul ordonatei densității de repartiție normală a variabilei aleatoare (coloana 9):

$$f_x(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2} = f_z(z_i) \cdot \frac{\Delta}{\sigma}$$

Pasul 10. Calculul ordonatei funcției de repartiție normală a variabilei aleatoare (coloana 10):

$$F_x(x_i) = F_z(z_i)$$

Tabelul 1.2

Tabel pentru extragerea ordonatelor funcției de repartiție a variabilei reduse z_i

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

z	F _Z (z)	z	F _Z (z)	z	F _Z (z)	z	F _Z (z)	z	F _Z (z)	z	F _Z (z)
0,00	0,5000	0,40	0,6554	0,80	0,7881	1,20	0,8849	1,60	0,9452	2	0,977250
0,02	0,5080	0,42	0,6628	0,82	0,7939	1,22	0,8888	1,62	0,9474	2,1	0,982136
0,04	0,5160	0,44	0,6700	0,84	0,7995	1,24	0,8925	1,64	0,9495	2,2	0,986097
0,06	0,5239	0,46	0,6772	0,86	0,8051	1,26	0,8962	1,66	0,9515	2,3	0,989276
0,08	0,5319	0,48	0,6844	0,88	0,8106	1,28	0,8997	1,68	0,9535	2,4	0,991802
0,10	0,5398	0,50	0,6915	0,90	0,8159	1,30	0,9032	1,70	0,9554	2,5	0,993790
0,12	0,5478	0,52	0,6985	0,92	0,8212	1,32	0,9066	1,72	0,9573	2,6	0,995339
0,14	0,5557	0,54	0,7054	0,94	0,8264	1,34	0,9099	1,74	0,9591	2,7	0,996533
0,16	0,5636	0,56	0,7123	0,96	0,8315	1,36	0,9131	1,76	0,9608	2,8	0,997445
0,18	0,5714	0,58	0,7190	0,98	0,8365	1,38	0,9162	1,78	0,9625	2,9	0,998134
0,20	0,5793	0,60	0,7257	1,00	0,8413	1,40	0,9192	1,80	0,9641	3	0,998650
0,22	0,5871	0,62	0,7324	1,02	0,8461	1,42	0,9222	1,82	0,9656	3,2	0,999313
0,24	0,5948	0,64	0,7389	1,04	0,8508	1,44	0,9251	1,84	0,9671	3,4	0,999663
0,26	0,6026	0,66	0,7454	1,06	0,8554	1,46	0,9279	1,86	0,9686	3,6	0,999841
0,28	0,6103	0,68	0,7517	1,08	0,8599	1,48	0,9306	1,88	0,9699	3,8	0,999928
0,30	0,6179	0,70	0,7580	1,10	0,8643	1,50	0,9332	1,90	0,9713	4	0,999968
0,32	0,6255	0,72	0,7642	1,12	0,8686	1,52	0,9357	1,92	0,9726	5	1,000000
0,34	0,6331	0,74	0,7704	1,14	0,8729	1,54	0,9382	1,94	0,9738		
0,36	0,6406	0,76	0,7764	1,16	0,8770	1,56	0,9406	1,96	0,9750		
0,38	0,6480	0,78	0,7823	1,18	0,8810	1,58	0,9429	1,98	0,9761		

Observație: $F_Z(-z) = 1 - F_Z(z)$

Pasul 11. Centralizarea rezultatelor

Tabelul 1.3

Calculul ordonatelor densității și funcției de repartiție

i	Intervalul de grupare $\Delta=0,2 \text{ kN/m}^3$	Valoarea centrală a intervalului (kN/cm^2)	Frecvențe absolute	Frecvențe relative (probabilitatea)	Frecvențe relative cumulate	Repartiția normală pentru variabila redusă Z			Repartiția normală pentru variabila X	
	Δ	x_i	n_i	f_i	F_i	z_i	$f_z(z_i)$	$F_z(z_i)$	$f_x(x_i)$	$F_x(x_i)$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	16,0 – 16,2	16,1	3	0,018	0,018	-2,418	0,021	0,008	0,009	0,008
2	16,2 – 16,4	16,3	4	0,023	0,041	-2,005	0,053	0,022	0,022	0,022
3	16,4 – 16,6	16,5	7	0,041	0,082	-1,591	0,112	0,056	0,047	0,056
4	16,6 – 16,8	16,7	13	0,076	0,158	-1,178	0,199	0,119	0,082	0,119
5	16,8 – 17,0	16,9	22	0,129	0,287	-0,764	0,298	0,222	0,123	0,222
6	17,0 – 17,2	17,1	28	0,164	0,450	-0,351	0,375	0,363	0,155	0,363
7	17,2 – 17,4	17,3	26	0,152	0,602	0,063	0,398	0,525	0,165	0,525
8	17,4 – 17,6	17,5	25	0,146	0,749	0,476	0,356	0,683	0,147	0,683
9	17,6 – 17,8	17,7	19	0,111	0,860	0,890	0,269	0,813	0,111	0,813
10	17,8 – 18,0	17,9	15	0,088	0,947	1,303	0,171	0,904	0,071	0,904
11	18,0 – 18,2	18,1	5	0,029	0,977	1,717	0,091	0,957	0,038	0,957
12	18,2 – 18,4	18,3	2	0,012	0,988	2,130	0,041	0,983	0,017	0,983
13	18,4 – 18,6	18,5	1	0,006	0,994	2,544	0,016	0,995	0,006	0,995
14	18,6 – 18,8	18,7	1	0,006	1,000	2,957	0,005	0,998	0,002	0,998

Pasul 12. Reprezentarea grafică a densității de repartiție normală (Fig. 1.6) și funcției de repartiție normală (Fig. 1.7) pentru greutatea volumică.

Fig. 1.6

Densitatea de repartiție normală

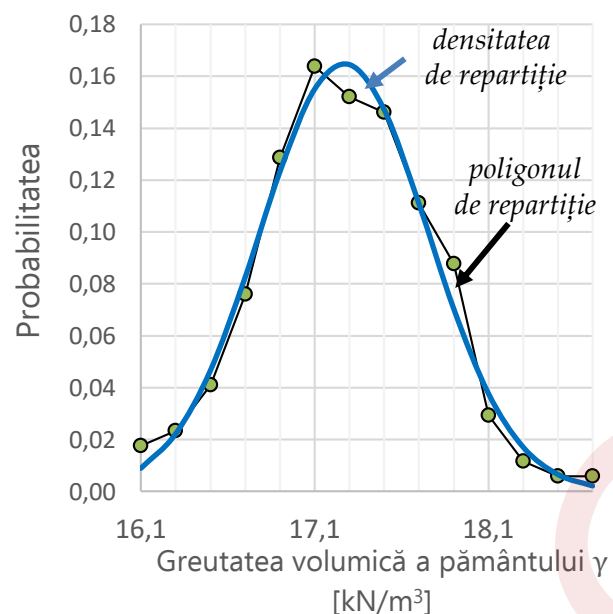
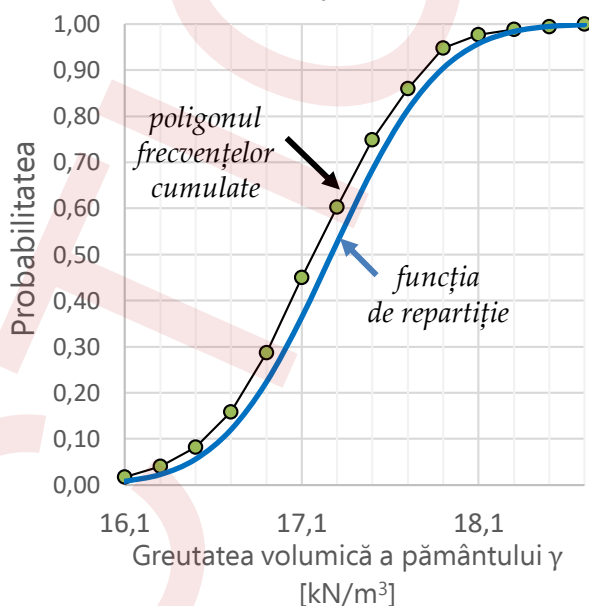


Fig. 1.7

Funcția de repartiție normală



Pasul 13. Calculul fractililor x_p (valorile γ) pentru anumite probabilități (P)

$$x_p = X_m + K \cdot \sigma_x$$

Coefficientul K, pentru repartiția normală, se alege din tabelul alăturat sau se poate calcula în Microsoft Excel cu ajutorul funcției NORM.S.INV

$$K = \text{NORM.S.INV}(P)$$

a) probabilitatea **P = 1%**

$$\Rightarrow \gamma_{0,001} = 17,27 - 3,090 \cdot 0,48 = 15,79 \text{ kN/m}^3$$

b) probabilitatea **P = 1,35%**

$$\Rightarrow \gamma_{0,00135} = 17,27 - 3,000 \cdot 0,48 = 15,83 \text{ kN/m}^3$$

c) probabilitatea **P = 1%**

$$\Rightarrow \gamma_{0,01} = 17,27 - 2,326 \cdot 0,48 = 16,15 \text{ kN/m}^3$$

d) Probabilitatea P = 5% (nivel de încredere 95%)

$$\Rightarrow \gamma_{0,05} = 17,27 - 1,645 \cdot 0,48 = 16,48 \text{ kN/m}^3$$

e) Probabilitatea **P = 10%**

$$\Rightarrow \gamma_{0,10} = 17,27 - 1,281 \cdot 0,48 = 16,65 \text{ kN/m}^3$$

f) Probabilitatea **P = 15,87%**

$$\Rightarrow \gamma_{0,10} = 17,27 - 1,000 \cdot 0,48 = 16,79 \text{ kN/m}^3$$

g) Probabilitatea **P = 50%**

$$\Rightarrow \gamma_{0,50} = 17,27 - 0,000 \cdot 0,48 = 17,27 \text{ kN/m}^3$$

h) Probabilitatea P = 95% (nivel de încredere 5%)

$$\Rightarrow \gamma_{0,95} = 17,27 + 1,645 \cdot 0,48 = 18,06 \text{ kN/m}^3$$

i) Probabilitatea **P = 99%**

$$\Rightarrow \gamma_{0,95} = 17,27 + 2,326 \cdot 0,48 = 18,39 \text{ kN/m}^3$$

Probabilitatea $P = F_Z(z)$	Factorul K
0,10%	-3,090
0,14%	-3,000
1%	-2,326
2%	-2,054
2,28%	-1,989
5%	-1,645
10%	-1,282
15,87%	-1,000
20%	-0,842
30%	-0,524
40%	-0,253
50%	0,000
60%	0,253
70%	0,524
80%	0,842
84,13%	1,000
90%	1,282
95%	1,645
97,72%	2,000
99%	2,326